

【 1 】 以下は，2分探索木操作の時間解析について述べたものである．(ア)～(エ)に入るべき式を答えよ．(各5)

n 個のランダムな要素のリストから作られる2分探索木の根から節点までの経路の平均長を $P(n)$ とする．リストの先頭を要素 a とし， a より小さい要素が i 個， a より大きいものが $n-i-1$ 個あるとする．根の左と右の部分木の経路の平均長は，それぞれ $P(i)$ ，(ア) のはずである．そこで0から $n-1$ までのすべての i に関する次式の平均値が $P(n)$ となる．

$$\frac{i}{n}(P(i) + 1) + \frac{(n-i-1)}{n}((ア) + 1) + (イ)$$

0 から $n-1$ までの i に関して上の和を平均すると，

$$P(n) = 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (ウ), \quad n \geq 2$$

と書ける． n についての帰納法を使って， $P(n) \leq 1 + 4(エ)$ であることが示せる．したがって，ランダムに要素を挿入して作った2分探索木で，根から節点までの経路に沿って進むための平均時間が $O((エ))$ であることがわかった．

【 2 】 以下の問に答えよ．(各5)

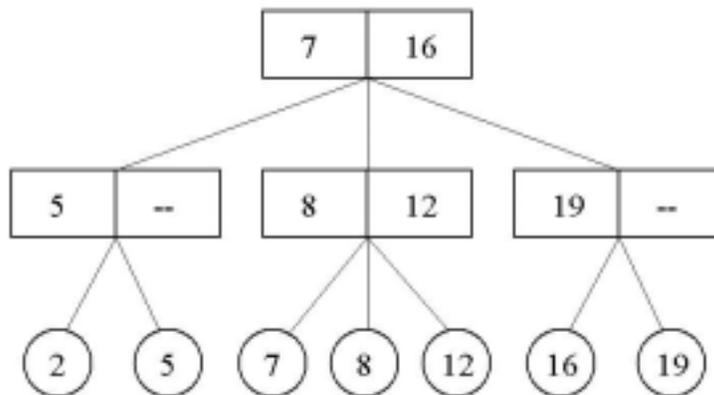
(ア) 空の木に整数 5, 6, 4, 9, 3, 1, 7 を挿入したときに得られる半順序のついた木を示せ．

(イ) さらに，DELETETEMIN の操作を3回行ったらどうなるか．

【 3 】 以下の2-3木に対して，次の操作を順に行って得られる2-3木を描け．(各5) — これは本試験と順序と逆である．

(ア) 2を削除．

(イ) 9を挿入．



【 4 】 頂点の数 n の無向グラフに閉路があるかどうかを判定する $O(n)$ 時間のアルゴリズムを述べよ。(10)

【 5 】 基数ソートについて説明せよ。(10)

【 6 】 次の再帰方程式を解け。(10)

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = aT(n/b) + cn$$

【 7 】 与えられた n 個の要素 x_1, x_2, \dots, x_n に線形順序 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ が定められているものとして、これらの要素を、検索の平均コスト $\sum_{i=1}^n p_i(d_i + 1)$ が最小になるように、2分探索木に登録したい。ただし、 p_i は検索の要求が要素 x_i に対するものである確率、 d_i は x_i をもっている節点の深さである。 $P_{i,j}$ で、 x_i から始まる j 個の要素、すなわち $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}$ だけをもつすべての木の最小検索コストとする。

(ア) $P_{i,j}$ を、 $P_{i',j'}$ ($i \leq i', i' + j' \leq i + j, j' < j$) を用いて表現せよ。(10)

(イ) 動的プログラミングを用いて $P_{i,j}$ を求めるアルゴリズムの実行時間を求めよ。(10)

【 8 】 コスト付き無向グラフの極大木のコストが最小でないとき、極大木の一辺を削除し、代わりに別の辺を加えることにより、よりコストの小さい極大木が得られることを説明せよ。プリムのアルゴリズムの正しさを仮定してもよい。(10) — これは本試験と同じ問題である。